

۹۱) ریشه سوم عددی از ریشه پنجم عدد -243 ، هفت واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۱۶

۹۲) در مورد عدد $\sqrt[3]{32}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) برابر با ۲ است.
 (۲) برابر با $2\sqrt{2}$ است.
 (۳) بین ۲ و ۳ است ولی برابر $2\sqrt{2}$ نیست.
 (۴) بین ۳ و ۴ است.

۹۳) با توجه به گزینه‌های داده شده، اگر $a = 5$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sqrt{10} < a < \sqrt[3]{30}$
 (۲) $\sqrt{150} < a < \sqrt{50}$
 (۳) $\sqrt[3]{500} < a < \sqrt{40}$
 (۴) $\sqrt{500} < a < \sqrt{40}$

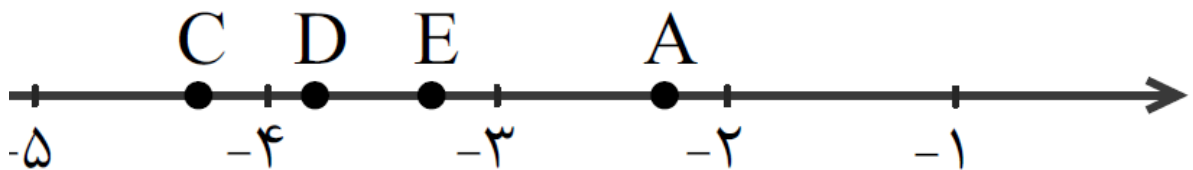
۹۴) اگر ریشه سوم عدد حقیقی a با خودش برابر باشد، حاصل عبارت $a^2 + a^3 + \sqrt[3]{a}$ ، برابر کدام یک از مقادیر زیر نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

۹۵) اگر $a = 0.0007$ باشد، کدام رابطه زیر درست است؟

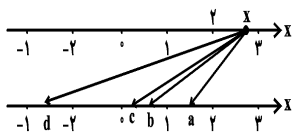
- (۱) $a^6 < a^{13}$
 (۲) $\sqrt{a} < a$
 (۳) $a^{13} < a^{15}$
 (۴) $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$

۹۶) با توجه به محور زیر، کدام گزینه نمی‌تواند صحیح باشد؟



- (۱) $A = -\sqrt[3]{9}$
 (۲) $C = -3\sqrt{2}$
 (۳) $E = -\sqrt[3]{17}$
 (۴) $D = -\sqrt{15}$

۹۷) در شکل زیر، عددها x به ریشه‌های دوم، سوم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. کدام گزینه درست است؟



- (۱) d, c : ریشه دوم، b : ریشه سوم و a : ریشه پنجم
 (۲) d, a : ریشه دوم، b : ریشه سوم و c : ریشه پنجم
 (۳) d, a : ریشه سوم، c : ریشه سوم و b : ریشه پنجم
 (۴) d, c : ریشه دوم، a : ریشه سوم و b : ریشه پنجم

۹۸) اگر $a = \sqrt[3]{64}$ ، آنگاه ریشه سوم عدد $(4a^2 - 5)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۹۹) اگر $x + y = 4\sqrt{xy}$ باشد، حاصل عبارت تعریف شده $\frac{x^2 + y^2 + 4xy}{x^2 + y^2 - 5xy}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۱۰۰) از تساوی $2\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + a\sqrt{50} = 20\sqrt{2}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲/۴ (۲) ۳/۶ (۳) ۴/۸ (۴) ۵/۲

۱۵۰) نسبت عدد $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ به $\sqrt{6}$ برابر چه توانی از ۲ است؟

- (۱) $-1/5$
 (۲) $2/54$
 (۳) -1
 (۴) -2

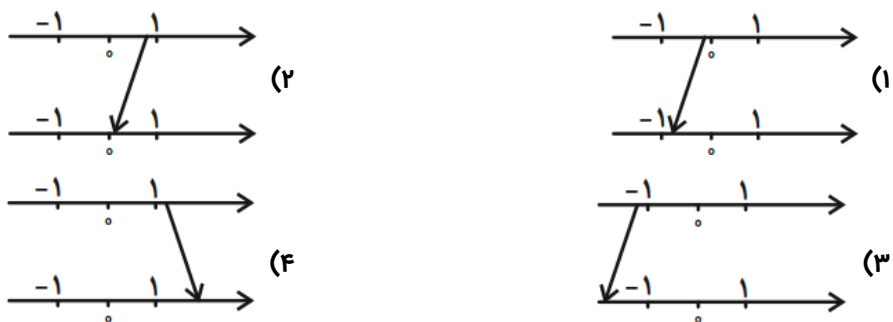
۱۵۱) ریشه چهارم عدد $a = 1 + \frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[4]{2}$
 (۲) $\sqrt[4]{3}$
 (۳) $\sqrt[4]{2}$
 (۴) $\sqrt[4]{3}$

۱۵۲) حاصل عبارت $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۵۳) اگر نقاط مشخص شده روی محور پایین، متناظر با ریشه پنجم نقاط مشخص شده روی محور بالا باشند، کدام گزینه درست است؟



۱۵۴) اگر $0 < \theta < 90^\circ$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\sin \theta} (\sqrt{\frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{\sin \theta}}}})^{-1}}{\sqrt{\sin \theta} \times \sqrt{\sqrt{\sin \theta}}}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \theta$
 (۲) 1
 (۳) $(\sin \frac{\theta}{2})$
 (۴) $(\sin \frac{\theta}{4})$

۱۵۵) حاصل $(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{3})^2$ برابر کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{2}$
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) 1
 (۴) صفر

۱۵۶) حاصل عبارت $A = \frac{-3\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{6}}{4\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) 2
 (۳) -2
 (۴) -1

۱۵۷) اگر ریشه چهارم عدد a ، برابر ریشه سوم عدد b باشد، نسبت ریشه سوم عدد a به ریشه نهم عدد b چند برابر ریشه سوم عدد b خواهد بود؟ ($a, b > 0$)

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt[4]{2}$

۱۵۸) حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^3 - \sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}-1)^3}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) 4
 (۳) $\sqrt{2}$
 (۴) 2

۱۵۹) اگر $x = \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{3}}$ و ریشه سوم Ax برابر $4\sqrt[3]{2}$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) $\frac{128}{3}$
 (۲) $\frac{32}{3}$
 (۳) $\frac{256}{3}$
 (۴) 1

۱۱۱) اگر $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{3}$ ، کدام گزینه از بقیه بزرگتر است؟

$a^5 + a^8$ (۴) $a^7 + a^8$ (۳) $a^3 + a^7$ (۲) $a^3 + a^6$ (۱)

۱۱۲) اگر $a = \sqrt{2010}$ ، $b = 8\sqrt{30}$ ، $c = \sqrt{10 \times 30}$ ، $d = \sqrt[3]{10^5 \times 90}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$a < b$ (۴) $b < a$ (۳) $b < a$ (۲) $b < c$ (۱)
 $< c$ $< c$ $< d$ $< a$
 $< d$ $< d$ $< c$ $< d$

۱۱۳) اگر اعداد متمایز $\frac{1}{p}$ و m ریشه‌های m ام عدد $\frac{1}{p^m}$ باشند، حاصل $m^r n$ برابر کدام است؟

-2 (۲) 2 (۱)
 $-\frac{9}{p}$ (۴) $\frac{9}{p}$ (۳)

۱۱۴) در تقسیم چندجمله‌ای $(x+2)^2(x-1)$ بر $x-2$ ، مجموع ضرایب خارج قسمت و باقی‌مانده کدام است؟

صفر (۴) 40 (۳) 16 (۲) 32 (۱)

۱۱۵) اگر $a = \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{x^2-4x+3}$ باشد، حاصل $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$ کدام است؟

$\frac{x}{a}$ (۴) $\frac{x}{a}$ (۳) $\frac{x}{a^2}$ (۲) $\frac{x}{a^2}$ (۱)

۱۱۶) حاصل عدد $\sqrt{3 + \sqrt{2\sqrt{7}+1}} - \sqrt{3 - \sqrt{2\sqrt{7}+1}}$ کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{7} - 1$ (۳) $\frac{\sqrt{7}}{+1}$ (۲) $2\sqrt{7}$ (۱)

۱۱۷) اگر $0 < a < -1$ ، آنگاه کدام مقایسه درست است؟

$a^3 < a^5$ (۲) $\frac{1}{|a|} < a^2$ (۱)
 $\frac{1}{|a|} < \sqrt{\frac{1}{|a|}}$ (۴) $\sqrt{-a} < \sqrt{|a|}$ (۳)

۱۱۸) حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{50} + \sqrt{49}} + \frac{1}{\sqrt{51} + \sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{52} + \sqrt{51}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{361} + \sqrt{360}}$ کدام است؟

13 (۴) 10 (۳) 11 (۲) 12 (۱)

۱۱۹) حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8\sqrt[3]{16}}} (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})$ کدام است؟

صفر (۴) 2 (۳) $\frac{2}{+\sqrt{3}}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)

۱۲۰) اگر a یک عدد حقیقی منفی بزرگتر از -1 باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

$a^3 > a^5$ (۲) $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ (۱)
 $\sqrt[3]{a+1} > \sqrt{a+1}$ (۴) $(a+1)^5 > (a+1)^3$ (۳)

۱۲۱) به‌ازای چند عدد طبیعی مضرب 3 ، نامساوی $4 < \sqrt{x} < 5$ برقرار می‌باشد؟

18 (۲) 17 (۱)
 20 (۴) 19 (۳)

۱۲۱) حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})}$ کدام است؟

$$\times \sqrt[3]{(7 + 4\sqrt{3})}$$

$$\times \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}$$

- ۲ (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴)

۱۲۲) اگر گویا شده عبارت $A = \frac{x^y}{\sqrt{x^y + a + 3}}$ برابر $b - \sqrt{x^y + a}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) -۱۲ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴)

۱۲۳) اگر $0 < x < 1$ - آنگاه کدام رابطه درست است؟

- (۱) $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3}$ (۲) $x^2 < x^3$ (۳) $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ (۴) $x^2 < x$

۱۲۴) اگر $A = 2x^2 + 8x - 3x^3 - 24$ باشد. آنگاه حاصل A کدام است؟

$$= (A - 1)(x^2 - 2x + 4)$$

- (۱) $\frac{x^2}{-x - 5}$ (۲) $\frac{x^2}{-x + 5}$ (۳) $\frac{x^2}{-2x}$ (۴) $\frac{x^2}{+2x}$

۱۲۵) به ازای کدام مقدار n ، تساوی $\sqrt[n]{\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}} = \sqrt{2}$ برقرار است؟

- ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

۱۲۶) عدد $\sqrt[3]{-64}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

- (۱) -۲ و -۳ (۲) -۳ و -۴
(۳) -۴ و -۵ (۴) -۵ و -۶

۱۲۷) اگر $x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-2}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+2}}$ باشد، حاصل $\frac{x+3}{x+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{2\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{6}{3\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

۱۲۸) حاصل عبارت $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) ۱

۱۲۹) حاصل جمع مجذور ریشه‌های ششم عدد a ، تقسیم بر ریشه پنجم a برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد. a^6 کدام است؟

- (۱) 2^{-17} (۲) 2^{17} (۳) $\frac{1}{2^{15}}$ (۴) 2^{-45}

۱۳۰) از درستی رابطه $\sqrt{\sin \theta} < \sin \theta$ ، درستی کدام گزینه را می‌توان نتیجه گرفت؟

- (۱) $\sin^2 \theta + \sin \theta > 0$ (۲) $\sin^2 \theta - \sin \theta < 0$
(۳) $0 < \sin \theta < 1$ (۴) $\sqrt{\sin^2 \theta} > -\sin \theta$

۱۳۱) حاصل عبارت $a^3 - 6a^2 + 12a - 2$ به ازای $a = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) -۲ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴)

۱۳۲) اگر $x = 1 + \sqrt{3}$ ، آنگاه حاصل $(\frac{x^2-4}{x})^3$ کدام است؟

- ۲۷ (۱) ۹ (۲) ۸۱ (۳) ۱ (۴)

۱۴۵) اگر $A = \sqrt[3]{3}$ ، آنگاه $\sqrt[3]{0.00729}$ بر حسب A کدام است؟

- (۱) $0.2A$ (۲) $0.6A$ (۳) $0.3A$ (۴) $0.4A$

۱۴۶) حاصل $\frac{64x^2-125}{x-1/25}$ به ازای $x = \frac{\sqrt{15}-5}{8}$ کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۰۰

۱۴۷) اگر $0 < x < -1$ باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر، از سایر گزینه‌ها کوچک‌تر است؟

- (۱) x^3 (۲) \sqrt{x} (۳) $x\sqrt{x}$ (۴) x

۱۴۸) اگر $(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{3\sqrt[3]{81}} = A$ باشد، حاصل $(3A)^{-\frac{2}{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

۱۴۹) حاصل عبارت $(2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}(2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{2}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ بیان شده است، A کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{-1}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{+1}$

۱۵۰) در تجزیه عبارت $1 + 3y^2 - y^4$ کدام عبارت موجود است؟

- (۱) $y^2 - y - 1$ (۲) $y^2 - 2y - 1$
 (۳) $y^2 + y + 1$ (۴) $y^2 + 2y + 1$

۱۵۱) حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}} + (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0/3} - 8^{0/1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $-2^{0/3}$ (۳) $2^{0/3}$ (۴) صفر

۱۵۲) اگر $a = \sqrt[4]{4 \times 3^5}$ باشد، حاصل عبارت $A = a \times \sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۵۳) عدد $\sqrt{4x^2+1} - 4x$ فقط یک ریشه دوم دارد. مقدار $4x - 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) صفر (۴) ۱

۱۵۴) در تجزیه عبارت $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- (۱) $x - 4$ (۲) $x - 2$ (۳) $x + 2$ (۴) $x + 3$

۱۵۵) عدد $\sqrt{\sqrt{28} + 2\sqrt{18}}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

- (۱) ۳ و ۴ (۲) ۴ و ۵ (۳) ۵ و ۶ (۴) ۶ و ۷

۱۵۶) اگر $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3^2-12n}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3^2-12n}}}{9}$ باشد، n کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۵۷) اگر $x^2 + 2x - 1 = 0$ آنگاه حاصل $x^2 + 12x$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۵۸) حاصل عبارت $(x+3)\sqrt{x} - (3x+1)$ به ازای $x = 3 + 2\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۵۹) اگر $A = \frac{1}{\sqrt{7}} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt{\sqrt{7}}$ باشد، حاصل A^{-12} کدام است؟

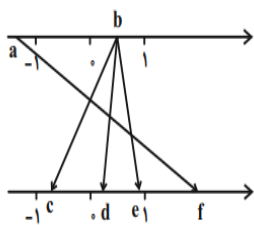
- (۱) $\sqrt[3]{7}$
 (۲) $\sqrt[3]{4}$
 (۳) $2\sqrt[3]{7}$
 (۴) $4\sqrt[3]{7}$

۱۶۰) اگر عدد مثبت A را به توان $\frac{1+2n}{n}$ برسانیم و سپس ۳۲ برابر کنیم، حاصل آن برابر با ریشه n ام A می‌شود. عدد A کدام است؟

- (۱) $2\sqrt[3]{2}$
 (۲) $6\sqrt[3]{2}$
 (۳) $\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$
 (۴) $\frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$
- ۱۶۱) اگر $\sqrt{x^2} - \sqrt{15x - x^2} + \sqrt{225 - 30x + x^2} = 5$ ، آنگاه مقدار $\sqrt{x} + \sqrt{15 - x}$ کدام است؟ (رادیکال‌ها تعریف شده هستند.)

- (۱) $\frac{1}{5}$
 (۲) 5
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) 3

۱۶۲) در شکل زیر، هر یک از اعداد محور بالا، طی اعمالی به اعداد محور پایین نظیر شده‌اند. کدام یک از اعمال زیر، قطعاً در شکل موجود نیست؟ (e و c مربوط به یک عمل می‌باشند)



- (۱) ریشه سوم
 (۲) ریشه چهارم
 (۳) توان دو
 (۴) توان سه

۱۶۳) از تساوی $\frac{2^m \times (\frac{1}{2})^{\frac{m}{2}}}{12^m \times (\frac{1}{6})^{\frac{m}{2}}} = 2\sqrt{2}$ ، مقدار n کدام به دست می‌آید؟

- (۱) $-\frac{13}{6}$
 (۲) $-\frac{7}{4}$
 (۳) $-\frac{11}{18}$
 (۴) $-\frac{5}{9}$

۱۶۴) اگر $x > 0$ و $x^6 - 7x^2 + 9 = 0$ ، حاصل عبارت $\frac{2x^6}{x^2+27}$ کدام است؟

- (۱) $13\sqrt{13}$
 (۲) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
 (۳) $2\sqrt{13}$
 (۴) $\frac{\sqrt{13}}{22}$

۱۶۵) اگر حاصل عبارت $\frac{a^6+a^5+a^4+\dots+a^2}{a^{-10}+a^{-9}+a^{-8}+\dots+a^{-2}}$ برابر $9\sqrt{3}$ باشد، آنگاه مقدار $a^{\frac{1}{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{3}$
 (۲) $\sqrt[3]{3}$
 (۳) $\sqrt{3}$
 (۴) 3

۱۶۶) اگر $a = 3c - 2b$ ، $a, b, c \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ و $3c^3 = 2b^3 + a^3$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟ (a و b و c با هم برابر نیستند.)

- (۱) 3
 (۲) 1
 (۳) صفر
 (۴) -1

۱۶۷) حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{(\frac{1}{\sqrt{7}} - 2)} \sqrt[3]{(\frac{3}{7} + 2\sqrt{7})}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt[3]{\frac{7}{7}}$
 (۲) $\sqrt[3]{\frac{7}{7}}$
 (۳) $-\sqrt[3]{\frac{49}{7}}$
 (۴) $\sqrt[3]{\frac{49}{7}}$

۱۶۸) اگر $\alpha^3 < \sqrt{\alpha}$ و $\sqrt[3]{\beta} < \beta^2$ باشد، چند مورد از موارد زیر، قطعاً درست است؟

الف) ریشه سوم $\alpha\beta$ از ریشه پنجم آن بزرگتر است.

ب) ریشه چهارم مثبت $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ در صورت وجود، از ریشه دوم مثبت آن بزرگتر است.

ج) ریشه دوم α^2 از ریشه سوم آن کوچکتر است.

د) ریشه سوم β^2 از ریشه چهارم مثبت آن بزرگتر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۶۹) اگر $\sqrt{2x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 1} + 5x = 0$ باشد، حاصل عبارت $\frac{12\sqrt{2x^2 - x + 1}}{-13\sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۷۰) اگر $x^2 - 2kx + 1 = 0$ باشد، حاصل عبارت $A = x^2(x+1) + \frac{1}{x^2}(\frac{1}{x} + 1)$ کدام است؟

۱ (۱) $k^3 + 8k^2 - 6k - 2$
 ۲ (۲) $k^3 - 8k^2 + 6k + 2$
 ۳ (۳) $8k^3 + 4k^2 - 6k - 2$
 ۴ (۴) $8k^3 - 4k^2 + 6k - 2$

۱۷۱) ساده شده عبارت $A = 3\sqrt{2\sqrt{16\sqrt{4\sqrt{8}}}}$ کدام است؟
 $\times \sqrt{\frac{2}{17}}$

۱ (۱) $\sqrt[4]{64}$
 ۲ (۲) $\sqrt[4]{128}$
 ۳ (۳) $\sqrt[4]{9}$
 ۴ (۴) $\sqrt[4]{128}$

۱۷۲) حاصل عبارت $\frac{1}{1+(5\sqrt{6}+7)^2} + \frac{1}{1+(5\sqrt{6}-7)^2}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

۱ (۱) $(5\sqrt{6}^3 + 7)$
 ۲ (۲) $(5\sqrt{6}^3 - 7)$
 ۳ (۳) $(\sqrt{2}^3 - 1)$
 ۴ (۴) $(\sqrt{2}^3 + 1)$

۱۷۳) ریشه سوم عدد $-9/25$ از عدد صحیح b کوچکتر است. حاصل ضرب کمترین مقدار b و ریشه چهارم منفی عدد ۸، برابر ریشه n ام مثبت عدد ۱۲۸ است. n کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۴)

۱۷۴) اگر $a - b = 1$ و $a^3 - b^3 = 2$ باشد، حاصل $a^6 - b^6$ چند برابر $\sqrt{21}$ می‌تواند باشد؟

۱ (۱) $\frac{1}{9}$
 ۲ (۲) $\frac{25}{9}$
 ۳ (۳) $\frac{1}{9}$
 ۴ (۴) $\frac{25}{9}$

۱۷۵) اگر $N = \sqrt{7 - \sqrt{13}}$ و $\sqrt{N^2 + k\sqrt{k}} = 6$ باشد، مقدار k کدام است؟
 $+ \sqrt{7 + \sqrt{13}}$

۱ (۱) $\sqrt[3]{200}$
 ۲ (۲) $\sqrt[3]{200}$
 ۳ (۳) $\sqrt[3]{100}$
 ۴ (۴) $\sqrt[3]{100}$

۱۷۶) اگر $a = 7 + 4\sqrt{3}$ و $b = 7 - 4\sqrt{3}$ باشد، حاصل $a^b \times b^a$ کدام است؟

۱ (۱) $(7 - 4\sqrt{3})^{7 + 4\sqrt{3}}$
 ۲ (۲) $(7 + 4\sqrt{3})^{7 - 4\sqrt{3}}$
 ۳ (۳) $(7 - 4\sqrt{3})^{7 - 4\sqrt{3}}$
 ۴ (۴) $(7 + 4\sqrt{3})^{7 + 4\sqrt{3}}$

۱۷۷) اگر $3^{a+1} = 75$ و $(\sqrt{5})^{b+2} = 15$ باشد، مجذور ab کدام است؟

- ۱ (۲) ۲ (۱)
۴ (۴) ۱۶ (۳)

۱۷۸) اگر $t = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $t^4 - 4t^2$ کدام است؟

- ۱۲ (۲) ۱۶ (۱)
۲ (۴) ۴ (۳)

۱۷۹) اگر $ab = 2$ و $a^3 + b^3 = 40$ ، با فرض اینکه $a > b$ ، حاصل $a^6 - b^6$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۱۱۲۰ (۴) ۱۰۹۶ (۳) ۱۰۸۰ (۲) ۱۰۲۴ (۱)

۱۸۰) حاصل عبارت $x^3 + \sqrt[3]{6}x^2 - 1$ به ازای $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟

- $\sqrt[3]{3}$ (۲) $1 + \sqrt[3]{2}$ (۱)
 $3\sqrt[3]{2}$ (۴) صفر (۳)

گزینه درست: ۲

سوال ۹۱

گزینه «۲»

فرض کنیم x عدد مورد نظر باشد، بنابراین:

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-243} + 7 \xrightarrow{\sqrt[3]{-243} = \sqrt[3]{(-3)^5} = -3} \sqrt[3]{x} = -3 + 7 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow x = (4)^3 = 64$$

گزینه درست: ۳

سوال ۹۲

گزینه «۳»

$$16 < 32 < 81 \Rightarrow 2^4 < 32 < 3^5 \xrightarrow{\text{ریشه چهارم}} 2 < \sqrt[4]{32} < 3$$

$$\text{از طرفی: } \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2} \neq 2\sqrt{2}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۹۳

گزینه «۴»

با توجه به گزینه‌های داده شده، تنها گزینه «۴» می‌تواند صحیح باشد.

$$\sqrt{40} \simeq 6/32 \quad \sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{500} \simeq 4/73 \quad \sqrt[4]{4^4} < \sqrt[4]{500} < \sqrt[4]{5^4} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \sqrt[4]{500} < 5 < \sqrt{40}$$

ریشه سوم عدد حقیقی a با خودش برابر است، $\sqrt[3]{a} = a$. این تساوی زمانی رخ می‌دهد که a مساوی -1 یا صفر یا 1 باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \text{اگر } a = -1 \Rightarrow a^2 + a^3 + \sqrt[3]{a} &= (-1)^2 + (-1)^3 + \sqrt[3]{-1} \\ &= 1 + (-1) + (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{اگر } a = 0 \Rightarrow a^2 + a^3 + \sqrt[3]{a} = 0.$$

$$\text{اگر } a = 1 \Rightarrow a^2 + a^3 + \sqrt[3]{a} = 1 + 1 + 1 = 3$$

بنابراین گزینه «۳» یعنی عدد 1 نمی‌تواند برابر عبارت $a^2 + a^3 + \sqrt[3]{a}$ باشد.

با توجه به اینکه $1 < a < 10$ آنگاه همواره $\dots > a^2 > a^3 > \dots$ برقرار می‌باشد. بنابراین گزینه «۱» درست است.

باید مشخص کنیم اعداد داده شده در گزینه‌ها در کدام محدوده قرار می‌گیرند:

$$\text{گزینه «۱» : } 2^3 = 8 < 9 < 27 = 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{9} < 3$$

$$\Rightarrow -3 < -\sqrt[3]{9} < -2 \Rightarrow A = -\sqrt[3]{9}$$

$$\text{گزینه «۲» : } 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}$$

$$4^2 = 16 < 18 < 25 = 5^2 \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5$$

$$\Rightarrow -5 < -\sqrt{18} < -4 \Rightarrow C = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$$

$$\text{گزینه «۳» : } 2^3 = 8 < 17 < 27 = 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{17} < 3$$

$$\Rightarrow -3 < -\sqrt[3]{17} < -2$$

بنابراین E نمی‌تواند برابر $-\sqrt[3]{17}$ باشد.

$$\text{گزینه «۴» : } 3^2 = 9 < 15 < 16 = 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{15} < 4$$

$$\Rightarrow -4 < -\sqrt{15} < -3 \Rightarrow D = -\sqrt{15}$$

توجه کنید که چون در نامعادله $9 < 15 < 16$ ، $3 < \sqrt{15} < 4$ پس در نامعادله $3 < \sqrt{15}$ ، به عدد 4 نزدیک‌تر است و در نتیجه $-\sqrt{15}$ به عدد -4 نزدیک‌تر است پس $D = -\sqrt{15}$ است.

سوال ۹۷

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

با توجه به اینکه $x > 1$ ، می‌باشد، آنگاه دارای دو ریشه دوم قرینه هم خواهد بود. از طرفی $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x} > \sqrt[5]{x}$ می‌باشد. بنابراین a و d ریشه‌های دوم، b ریشه سوم و c ریشه پنجم x خواهند بود.

سوال ۹۸

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[5]{64} \Rightarrow a^5 = \sqrt[5]{64^5} = \sqrt[5]{(2^6)^5} \\ &= \sqrt[5]{2^{30}} = \sqrt{(2^3)^6} = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

$$\text{آنگاه: } \sqrt[5]{4a^2 - 5} = \sqrt[5]{4 \times 8 - 5} = \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^3} = 3$$

سوال ۹۹

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

ابتدا دو طرف تساوی $x + y = 4\sqrt{xy}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x + y)^2 = (4\sqrt{xy})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 16xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 14xy$$

تساوی حاصل را در کسر داده شده جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{(x^2 + y^2) + 4xy}{(x^2 + y^2) - 5xy} = \frac{14xy + 4xy}{14xy - 5xy} = \frac{18xy}{9xy} = 2$$

سوال ۱۰۰

گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

$$2\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + a\sqrt{50} = 20\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\sqrt{3^2 \times 2} - 5\sqrt{2^2 \times 2} + a\sqrt{5^2 \times 2} &= 20\sqrt{2} \\ \Rightarrow 6\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 5a\sqrt{2} &= 20\sqrt{2} \Rightarrow (5a - 4)\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \\ \Rightarrow 5a - 4 &= 20 \Rightarrow a = 4/5 \end{aligned}$$

سوال ۱۰۱

گزینه درست: ۱

گزینه «۱»

در $\sqrt{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}$ اگر صورت و مخرج را دو برابر کنیم داریم:

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{5}}{3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3}$$

پس مجموع آن با $\frac{1}{3}$ می‌شود $\frac{\sqrt{5}}{3}$ که نسبتش به $\sqrt{6}$ برابر است با:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/2}$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰۲

گزینه «۲»

عبارت $1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 + \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2$$

با ضرب عبارت بالا در $\sqrt[3]{4} - 1$ داریم:

$$(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}^2)(\sqrt[3]{4} - 1) = (\sqrt[3]{4})^3 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3}{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{4} - 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{4} - 1 + 1 = \sqrt[3]{4}$$

ریشه چهارم $2^{\frac{2}{3}}$ برابر $\sqrt[3]{2}$ است. $2^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰۳

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2} &= \frac{\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} + \frac{1(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1 + \sqrt{3}-1)}{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۰۴

گزینه «۱»

برای هر عدد حقیقی a که $0 < a < 1$ - رابطه $\sqrt[n]{a} < a$ برقرار می‌باشد. سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

گزینه درست: ۱

سوال ۱۰۵

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} &\frac{(\sin \theta)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\lambda}}}{(\sin \theta)^{\frac{1}{\lambda}} (\sin \theta)^{\frac{1}{\lambda}}} \\ &= \frac{(\sin \theta)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)^{\frac{\lambda}{\lambda}} \right)^{-\frac{1}{\lambda}}}{(\sin \theta)^{\frac{\lambda}{\lambda}}} = \frac{(\sin \theta)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)^{-\frac{\lambda}{\lambda}}}{(\sin \theta)^{\frac{\lambda}{\lambda}}} \\ &= \frac{(\sin \theta)^{\frac{\lambda}{\lambda}}}{(\sin \theta)^{\frac{\lambda}{\lambda}}} = \sin \theta \end{aligned}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰۶

گزینه «۴»

$$\frac{\sqrt[2]{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}}}{\sqrt[2]{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[2]{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰۷

گزینه «۴»

$$A = \frac{-3\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{16}}{4\sqrt[3]{64} - 2\sqrt[3]{16}} = \frac{-3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{4\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \frac{-3 \times 2 + 2}{4 \times 2 - 2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰۸

گزینه «۴»

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{b} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{1}{3}} a = 2b^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2b^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{9}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2} b^{\frac{1}{3}}$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰۹

گزینه «۲»

از اتحاد مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\text{و داریم: } (\sqrt{2} + 1)^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} + 1) = 6 + 4\sqrt{2}$$

به طور مشابه داریم:

$$\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} - 1)^3 = \sqrt{2} - 1 - (5\sqrt{2} - 7) = 6 - 4\sqrt{2}$$

پس حاصل عبارت صورت سؤال با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای برابر است با:

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۱۰

گزینه «۱»

$$x = \frac{\sqrt{3 \times 3^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3$$

$$\sqrt[3]{Ax} = \sqrt[3]{3A} = 3\sqrt[3]{2} \xrightarrow{\text{توان } 3} 3A = 64 \times 2 \Rightarrow A = \frac{128}{3}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱۱

گزینه «۳»

با توجه به اینکه $1 < \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2} < 0$ ، هر چه a به توان عدد طبیعی بزرگتر برسد، کوچکتر می‌شود.

بین دو گزینه ۱ و ۲، $a^3 + a^6 > a^3 + a^9$ می‌باشد. (رد گزینه ۲)

بین دو گزینه ۱ و ۳، $a^2 + a^5 > a^3 + a^6$ می‌باشد. (رد گزینه ۱)

با مقایسه دو گزینه ۳ و ۴، $a^2 + a^5 > a^5 + a^8$ ، بنابراین گزینه «۳»، از بقیه عبارتها بزرگتر است.

گزینه درست: ۳

سوال ۱۱۲

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2010} = \sqrt{67 \times 30} \\ b &= \sqrt{8^2 \times 30} = \sqrt{64 \times 30} \\ c &= \sqrt{10 \times 3^5} = \sqrt{81 \times 30} \\ d &= \sqrt[3]{10^5 \times 90} = \sqrt[3]{10^6 \times 9} = \sqrt{10^3 \times 3} = \sqrt{100 \times 30} \\ &\Rightarrow b < a < c < d \end{aligned}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۱۳

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n = 256 \\ \Rightarrow n = 8, m = -\frac{1}{2} &\Rightarrow m^n = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۱۴

گزینه «۱»

$$(x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x^3+3x^2-4)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4 \mid x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 5x^2 - 4 \\ -(5x^2 - 10x) \\ \hline 10x - 4 \\ -(10x - 20) \\ \hline 16 \end{array}$$

۳۲ = ۱ + ۵ + ۱۰ + ۱۶ = مجموع ضرایب خارج قسمت و باقی‌مانده

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم ($a > 0$)

$$2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 3} = a^2$$

$$\Rightarrow (x-1) + (x-3) + 2\sqrt{(x-1)(x-3)} = a^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3})^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = a$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-3} = A$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = a & (1) \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3} = A & (2) \end{cases} \Rightarrow aA = (x-1) - (x-3) = 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{a}$$

عبارت را برابر A فرض می‌کنیم و طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$A = \sqrt{3 + \sqrt{2\sqrt{v} + 1}} - \sqrt{3 - \sqrt{2\sqrt{v} + 1}}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3 + \sqrt{2\sqrt{v} + 1} + 3 - \sqrt{2\sqrt{v} + 1} - 2\sqrt{9 - (2\sqrt{v} + 1)}$$

$$\Rightarrow A^2 = 6 - 2\sqrt{8 - 2\sqrt{v}} \Rightarrow A^2 = 6 - 2\sqrt{(\sqrt{v} - 1)^2}$$

$$\Rightarrow A^2 = 6 - 2|\sqrt{v} - 1|$$

عبارت داخل قدامطلق مثبت است. بنابراین:

$$\Rightarrow A^2 = 6 - 2(\sqrt{v} - 1) \Rightarrow A^2 = 8 - 2\sqrt{v} \Rightarrow A^2 = (\sqrt{v} - 1)^2$$

از طرفین جذر می‌گیریم.

$$|A| = |\sqrt{v} - 1|$$

باتوجه به مثبت بودن A داریم:

$$A = \sqrt{v} - 1$$

گزینه «۲»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: اگر $-1 < a < 0$ آنگاه

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 1 \\ 0 < |a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \end{cases}$$

بنابراین $\frac{1}{|a|} > a^2$ گزینه «۲»: اگر $-1 < a < 0$ آنگاه همواره $a^3 < a^5$.گزینه «۳»: اگر $-1 < a < 0$ آنگاه $0 < \frac{-a}{|a|} < 1$ در نتیجه $0 < \sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$.گزینه «۴»: اگر $-1 < a < 0$ بنابراین $|a| < 1$ از طرفی $\frac{1}{|a|} > 1$ پس:

$$\sqrt{\frac{1}{|a|}} < \frac{1}{|a|}$$

گزینه «۱»

$$\frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{50}} \times \frac{\sqrt{50} - \sqrt{49}}{\sqrt{50} - \sqrt{49}} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{49}}{50 - 49} = \sqrt{50} - \sqrt{49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{51} + \sqrt{50}} \times \frac{\sqrt{51} - \sqrt{50}}{\sqrt{51} - \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{51} - \sqrt{50}}{51 - 50} = \sqrt{51} - \sqrt{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{52} + \sqrt{51}} \times \frac{\sqrt{52} - \sqrt{51}}{\sqrt{52} - \sqrt{51}} = \frac{\sqrt{52} - \sqrt{51}}{52 - 51} = \sqrt{52} - \sqrt{51}$$

$$\frac{1}{\sqrt{361} + \sqrt{360}} \times \frac{\sqrt{361} - \sqrt{360}}{\sqrt{361} - \sqrt{360}} = \frac{\sqrt{361} - \sqrt{360}}{361 - 360} = \sqrt{361} - \sqrt{360}$$

$$\Rightarrow \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50} + \sqrt{52} - \sqrt{51} + \dots + \sqrt{361} - \sqrt{360}$$

$$= \sqrt{361} - \sqrt{49} = 19 - 7 = 12$$

گزینه «۳»

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

پس باید حاصل عبارت زیر را به دست آوریم:

$$\sqrt{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}) = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| - |1 - \sqrt{3}|$$

$$= 1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۲۰

گزینه «۴»

$$-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a+1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a+1} > \sqrt[3]{a} \\ (a+1)^{\Delta} < (a+1)^{\Delta} \\ a^{\Delta} < a^{\Delta} \\ \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a} \end{cases}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۲۱

گزینه «۴»

$$4 < \sqrt{x} < 5 \Rightarrow 16 < x < 25 \Rightarrow 64 < x < 125$$

$$x = 3k \Rightarrow \frac{64}{3} < k < \frac{125}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 22 \leq k \leq 41$$

بنابراین به ازای $20 = 41 - 22 + 1$ مقدار طبیعی مضرب ۳ نامساوی داده شده برقرار است.

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۲

گزینه «۱»

$$A = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2} \times \sqrt[3]{(7+4\sqrt{3})} \times \sqrt[3]{8}$$

$$= \sqrt[3]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} \times 2 = \sqrt[3]{49-48} \times 2 = 2$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۳

گزینه «۱»

ابتدا عبارت A را گویا می‌کنیم.

$$A = \frac{x^{\sqrt{a}}}{\sqrt{x^{\sqrt{a}}+3}} \times \frac{\sqrt{x^{\sqrt{a}}+3}}{\sqrt{x^{\sqrt{a}}+3}} = \frac{x^{\sqrt{a}}(\sqrt{x^{\sqrt{a}}+3})}{x^{\sqrt{a}}+9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\sqrt{a}}(\sqrt{x^{\sqrt{a}}+3})}{x^{\sqrt{a}}+9} = \sqrt{x^{\sqrt{a}}+3} - b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\sqrt{a}} = x^{\sqrt{a}} + a - 9 \Rightarrow a = 9 \\ \sqrt{x^{\sqrt{a}}+3} = \sqrt{x^{\sqrt{a}}+3} - b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = 12 \end{cases}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۴

گزینه «۱»

$$-1 < x < 0 \rightarrow 0 < x^{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} > 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}} > \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۵

گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 x^F - 3x^3 + 8x - 24 &= x^3(x-3) + 8(x-3) \\
 &= (x-3)(x^3+8) \xrightarrow[\text{چاق و لاغر}]{\text{اتحاد}} (x-3)(x+2)(x^2-2x+4) \\
 &= (A-1)(x^2-2x+4) \Rightarrow A-1 = (x-3)(x+2) \\
 &\Rightarrow A-1 = x^2 - x - 6 \Rightarrow A = x^2 - x - 5
 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲۶

گزینه «۲»

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[3]{33}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{11}} &= \frac{\sqrt[3]{3^2 \times 11}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{11}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 11^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \times 11^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} \times \frac{11^{\frac{1}{3}}}{11^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} \times 11^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 11^0 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow n = 12
 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲۷

گزینه «۲»

$$\sqrt[3]{-1024} < \sqrt[3]{-641} < \sqrt[3]{-243} \Rightarrow -4 < \sqrt[3]{-641} < -3$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۸

گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \\
 \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{1} &= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 5 - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{3} - 5 \\
 \frac{x+3}{x+\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}-5+3}{2\sqrt{3}-5+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}-5} \times \frac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}+5} \\
 &= \frac{8+4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲۹

گزینه «۱»

ابتدا مخرج کسرها را ساده می‌کنیم:

$$۲ \pm \sqrt{۳} = \frac{1}{۲} (۴ \pm ۲\sqrt{۳}) = \frac{1}{۲} (\sqrt{۳} \pm ۱)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۲} + \sqrt{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} (\sqrt{۳} + ۱) \\ = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۲} (\sqrt{۳} + ۱) \\ \sqrt{۲} - \sqrt{۲ - \sqrt{۳}} = \sqrt{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} (\sqrt{۳} - ۱) \\ = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۲} (\sqrt{۳} - ۱) \end{cases}$$

حال عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{۲ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} + \frac{۲ - \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} - \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}} &= \frac{\frac{1}{۲} (\sqrt{۳} + ۱)^۲}{\frac{\sqrt{۶}}{۲} (\sqrt{۳} + ۱)} + \frac{\frac{1}{۲} (\sqrt{۳} - ۱)^۲}{\frac{\sqrt{۶}}{۲} (\sqrt{۳} - ۱)} \\ &= \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۶}} + \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۲} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳۰

گزینه «۴»

$$\frac{(-\frac{1}{a})^۲ + (\frac{1}{a})^۲}{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{1}{a^۲} + \frac{1}{a^۲}}{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲a^{\frac{1}{۲}}}{a^{\frac{1}{۲}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a^{\frac{1}{۲}}}{a^{\frac{1}{۲}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۵}} \frac{a^{\frac{۱۵}{۲}}}{a^{\frac{۱۵}{۲}}} = \frac{۲^{\frac{۱۵}{۲}}}{a^{\frac{۱۵}{۲}}} \Rightarrow a^{\frac{۱۵}{۲}} = ۲^{-\frac{۱۵}{۲}} \Rightarrow a^F = ۲^{-F\frac{۱۵}{۲}} = \frac{1}{۲^{\frac{۱۵F}{۲}}}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۳۱

گزینه «۴»

رابطه $\sqrt{\sin \theta} < \sin \theta$ فقط به‌ازای $۰ < \sin \theta < ۱$ برقرار است؛ در این صورت فقط گزینه «۴» درست خواهد بود:

$$\sqrt{\sin^۲ \theta} > -\sin \theta$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۳۲

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} a^۲ - ۶a^۲ + ۱۲a &= (a^۳ - ۶a^۲ + ۱۲a - ۸) + ۸ \\ &= (a - ۲)^۳ + ۸ = (\sqrt{۲} + ۲ - ۲)^۳ + ۸ = ۲ + ۸ = ۱۰ \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۳۳

گزینه «۳»

$$\begin{aligned}
 x = 1 + \sqrt[3]{3} &\Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{3} \xrightarrow{3 \cdot H_k U_{\sqrt[3]{3}} M} (x - 1)^3 = (\sqrt[3]{3})^3 \\
 x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 &\Rightarrow x^3 - 4 = 3x^2 - 3x \\
 \Rightarrow \left(\frac{x^3 - 4}{x}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{3x^2 - 3x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3x(x-1)}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = (3(x-1))^{\frac{1}{3}} \\
 &= 27(x-1)^{\frac{1}{3}} = 27 \times (\sqrt[3]{3})^{\frac{1}{3}} = 27 \times 3 = 81
 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۳۴

گزینه «۳»

داریم $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ ، پس $(\sqrt{2} + 1)^{-1} = \sqrt{2} - 1$ ، پس حاصل کسر برابر است با $(\sqrt{2} - 1)^3$ که با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} - 1)^3 &= (\sqrt{2})^3 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) - 1 \\
 &= 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7 \\
 \Rightarrow A = -7, B = 5 &\Rightarrow A + B = -2
 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۳۵

گزینه «۳»

هر یک از عبارت‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری کرده و حاصل هر یک را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{-1}}_A \left(\underbrace{\left(\sqrt{14 - 4\sqrt{6}}\right)}_B - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)}_C \right) \\
 A = \left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{-1} &= \left(\sqrt[3]{3^1 \times 3^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 B = \sqrt{14 - 4\sqrt{6}} &= \sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2} = \left| \underbrace{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}_{(-)} \right| = 2\sqrt{3} \\
 &\quad - \sqrt{2} \\
 C = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\
 \text{حال حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:} & \\
 A(B - C) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left((2\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right) &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\sqrt{3}) = 1
 \end{aligned}$$

سوال ۱۳۶

گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}-2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

پس عبارت مورد نظر سوال، برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$$

سوال ۱۳۷

گزینه درست: ۴

گزینه «۴»

ابتدا هر یک از عبارتهای داخل قدرمطلقها را تعیین علامت می‌کنیم:

a و b اعدادی بین صفر و یک هستند و به هر توان طبیعی برسند باز بین صفر و یک خواهند بود. c هم عددی بزرگتر از ۳ است و در نتیجه $c^2 > 9$ ؛ با این حساب عبارت داخل قدرمطلق اول مثبت و عبارت داخل قدرمطلق دوم منفی است.

پس حاصل عبارت کلی برابر است با:

$$A = |a^6 - b^2 + c^2 - (-2a^6 + b^{12} + c^2)|$$

$$= |a^6 - b^2 + c^2 + 2a^6 - b^{12} - c^2|$$

$$= |3a^6 - b^2 - b^{12}| \xrightarrow{\substack{a^2 < b^2 \Rightarrow 3a^6 < b^2 \\ 3a^6 - b^2 < 0}}$$

$$A = -(3a^6 - b^2 - b^{12}) = -3a^6 + b^2 + b^{12}$$

سوال ۱۳۸

گزینه درست: ۴

گزینه «۴»

$$A = x^3 - 6x^2 + 12x + 2 = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 10$$

$$\Rightarrow A = (x-2)^3 + 10$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt[3]{8}+2} A = (\sqrt[3]{8}+2-2)^3 + 10 = (\sqrt[3]{8})^3 + 10 = 15$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۳۹

گزینه «۲»

ابتدا توجه کنید که $a = \sqrt[4]{9+5+2 \times 3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{(3+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3+\sqrt{5}}$ و به همین ترتیب $b = \sqrt{3-\sqrt{5}}$ است.

روش اول:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6 \\ ab = \sqrt{3+\sqrt{5}} \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{9-5} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 6 + 4 = 10 \Rightarrow a+b = \sqrt{10} \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 6 - 4 = 2 \Rightarrow a-b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

روش دوم: $ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{a+\frac{2}{a}}{a-\frac{2}{a}} = \frac{a^2+2}{a^2-2} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۴۰

گزینه «۳»

داریم $|x| + x = 0$ ، پس $|x| = -x$ که با توجه به $x \neq 0$ (شرط مسئله) نتیجه می‌گیریم $x < 0$ است.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x}{32}} \sqrt[6]{\frac{64}{129x^6}} &= \sqrt[3]{\frac{x}{32}} \sqrt[6]{\frac{2^6}{3^2 x^6}} = \sqrt[3]{\frac{x}{32}} \times \frac{|2|}{|3| \times |x|} \\ &= \sqrt[3]{\frac{x}{32}} \times \frac{2}{-3x} = \sqrt[3]{-\frac{1}{48}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{6}} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۴۱

گزینه «۴»

$$\sqrt[5]{0/00729} = \sqrt[5]{\frac{729}{10^5}} = \sqrt[5]{\frac{3^6}{10^5}} = \frac{3\sqrt[5]{3}}{10} = 0/3\sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \times 3} = \sqrt[5]{2^5 \times 3} = 2\sqrt[5]{3}$$

پس عبارت موردنظر برابر است با:

$$\frac{0/3\sqrt[5]{3}}{2\sqrt[5]{3}} = 0/15$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴۲

گزینه «۲»

به ازای $0 < a < 1$ داریم: $a < \sqrt{a}$ ، پس:

$$A = |a - \sqrt{a}| + \sqrt{(\sqrt{a} - a)^2} + \sqrt[3]{(a - \sqrt{a})^3}$$

$$= -a + \sqrt{a} + \sqrt{a} - a + a - \sqrt{a} = \sqrt{a} - a$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۴۳

گزینه «۱»

می‌توان نوشت:

$$16\sqrt{16} (k^F - \sqrt{k^A + Fk^F + F}) = 16(F)(k^F - \underbrace{|k^F + F|}_{\text{مثبت}})$$

$$= 64(k^F - (k^F + F)) = 64(-F) = -128$$

در نتیجه ریشه هفتم عبارت داده شده برابر می‌شود با:

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۴۴

گزینه «۴»

می‌دانیم که اگر $0 < a < 1$ آن‌گاه $a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1$

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ y = \sqrt[3]{a} \Rightarrow x^2 < x < y \\ x^2 = a \end{cases}$$

پس گزینه‌های «۱» و «۲» برقرار هستند، از طرفی:

$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > x \\ y < 1 \Rightarrow \frac{1}{y} > y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > x + y$$

یعنی گزینه «۳» هم برقرار می‌باشد.

گزینه درست: ۳

سوال ۱۴۵

گزینه «۳»

$$\sqrt[5]{\frac{0.00729}{10^6}} = \sqrt[5]{\frac{729}{10^9}} = \sqrt[5]{\frac{3^6}{10^9}} = \sqrt[5]{\frac{3^4 \times 3^2}{10^9}} = \sqrt[5]{\frac{3^4 \times 3^2}{10^9}}$$

$$= \sqrt[5]{\left(\frac{3}{10}\right)^5 \times 3} = \frac{3}{10} \sqrt[5]{3} = \frac{3}{10} A$$

ابتدا عبارت را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم و سپس جاگذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} 64x^3 - 125 = (4x)^3 - 5^3 = (4x - 5)(16x^2 + 20x + 25) \\ x - 1/25 = x - \frac{5}{5} = \frac{4x - 5}{4} \end{cases}$$

$$A = \frac{(4x-5)(16x^2+20x+25)}{\frac{(4x-5)}{4}} = 4(16x^2 + 20x + 25)$$

$$A = 64x^2 + 80x + 100 \xrightarrow{\text{مربع کامل}}$$

$$A = (8x + 5)^2 + 75$$

حال مقدار $x = \frac{\sqrt{15}-5}{8}$ را قرار می‌دهیم.

$$A = \left(8 \times \frac{\sqrt{15}-5}{8} + 5\right)^2 + 75$$

$$A = (\sqrt{15} - 5 + 5)^2 + 75 \Rightarrow A = 15 + 75 = 90$$

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow \sqrt[3]{x} < x < x^2 < 0 \\ x < 0, \sqrt[3]{x} < 0 &\Rightarrow x\sqrt[3]{x} > 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\sqrt[3]{x}$ ، کوچک‌ترین مقدار را در بین گزینه‌ها دارد.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{3 \times \sqrt[3]{3^6}} \times (3^{-2})^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3 \times 3^2} \times 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^3} \times 3^{\frac{4}{3}} \\ &= 3^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{3}{3} + \frac{4}{3}} = 3^{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 3^{\frac{7}{3}} \Rightarrow 3A = 3 \times 3^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{10}{3}} \Rightarrow (3A)^{-\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{10}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 3^{\frac{10}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = 3^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۴۹

گزینه «۳»

طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم. داریم:

$$\sqrt[3]{A} = (r - \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} (r + \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{r}}$$

$$A = (r - \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} (r + \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} (\sqrt{r})$$

$$= (r - \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} (r - \sqrt{r})^{\frac{1}{3}} (r + \sqrt{r})^{\frac{r}{3}} (\sqrt{r})$$

$$= ((r - \sqrt{r})(r + \sqrt{r}))^{\frac{r}{3}} (r - \sqrt{r})^{\frac{1}{3}} (r)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow A = 1^{\frac{r}{3}} \times (r - r\sqrt{r})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r - r\sqrt{r}}$$

$$A = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{r})^r} = |1 - \sqrt{r}| = \sqrt{r} - 1$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۵۰

گزینه «۱»

$$y^6 - 3y^2 + 1 = y^6 - 2y^2 + 1 - y^2 = (y^2 - 1)^2 - y^2$$

$$= (y^2 - 1 - y)(y^2 - 1 + y)$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۵۱

گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}} + (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0/3} - 8^{0/1} &= \sqrt[3]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}} + \sqrt[3]{2\sqrt[3]{8}} - 2^{0/3} \\ &\quad - 2^{0/3} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^6 \times 2^3}} + 2^{0/3} - 2 \times 2^{0/3} = 2^{\frac{3}{3}} - 2^{0/3} = 0 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵۲

گزینه «۲»

$$a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^6}} = ((2^6)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3 \times 3}} = 2^{\frac{2}{9}}$$

$$A = a\sqrt[3]{a^3} \sqrt[3]{a^3} = a \times a^{\frac{3}{3}} \times a^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{3+3+3}{3}} = a^{\frac{9}{3}} \xrightarrow{a=2^{\frac{2}{9}}} 2^2$$

$$A = (2^{\frac{2}{9}})^{\frac{9}{3}} = 2^{\frac{2}{9} \times \frac{9}{3}} = 2^2 = 4$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۵۳

گزینه «۴»

اعداد مثبت همواره ۲ ریشه دوم قرینه دارند، بنابراین عدد داده شده برابر با صفر باید باشد.

$$\sqrt{4x^2 + 1 - 4x} = 0 \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x-1=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x - 1 = 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۵۴

گزینه «۳»

عبارت‌ها را دسته‌بندی کرده و تجزیه می‌کنیم.

$$x^6 - 3x^5 + 8x - 24 = x^5(x-3) + 8(x-3)$$

$$= (x-3)(x^5 + 8) = (x-3)(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

عامل $(x+2)$ در عبارت وجود دارد.

گزینه درست: ۱

سوال ۱۵۵

گزینه «۱»

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6 \quad (I)$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5$$

$$\Rightarrow 8 < 2\sqrt{18} < 10 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)} 13 < \sqrt{28} + 2\sqrt{18} < 16$$

$$\Rightarrow 9 < \sqrt{28} + 2\sqrt{18} < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{\sqrt{28} + 2\sqrt{18}} < 4$$

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵۶

گزینه «۲»

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3^{n^2-12n}}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3^{n^2-12n}}}}{9} \Rightarrow \sqrt[3]{3^{-3} \times 3^{\frac{n^2-12n}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3^{\frac{n^2-12n}{3}}}}}{3^2}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n^2-12n-9}{12}} = 3^{-2} \times \sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{n^2-12n}{3}}} = 3^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-12n-9}{12} = -\frac{5}{3} \Rightarrow n^2 - 12n - 9 = -20$$

$$\Rightarrow n^2 - 12n + 11 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=11 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها $n=11$ می‌تواند باشد.

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵۷

گزینه «۲»

$$x^2 = 1 - 2x$$

$$x^6 = (1 - 2x)^2 \Rightarrow x^6 = 1 + 4x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^6 = 1 + 4(1 - 2x) - 4x \Rightarrow x^6 = 1 + 4 - 8x - 4x$$

$$\Rightarrow x^6 = 5 - 12x \Rightarrow x^6 + 12x = 5$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۵۸

گزینه «۳»

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3x - 1 &= (\sqrt{x})^3 - 3x + 3\sqrt{x} - 1 \\ &= (\sqrt{x} - 1)^3 \xrightarrow{x=3+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2} \left(\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - 1 \right)^3 \\ &= (\sqrt{3} + 1 - 1)^3 = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۵۹

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}} = 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \\ \Rightarrow A^{-12} &= \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{-12} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۳

سوال ۱۶۰

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} 32 \times A^{\frac{1+2n}{n}} &= \sqrt[3]{A} \Rightarrow 32 \times A^{\left(\frac{1}{n} + 2\right)} = A^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow 32 \times A^{\frac{1}{n}} \times A^2 &= A^{\frac{1}{3}} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{32} \\ \Rightarrow |A| &= \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \end{aligned}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۶۱

گزینه «۴»

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} x + (15 - x) &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{15-x})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x(15-x)} + \sqrt[3]{(15-x)^2}) \\ \Rightarrow 15 &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{15-x}) \times 5 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{15-x} = 3 \end{aligned}$$

گزینه درست: ۱

سوال ۱۶۲

گزینه «۱»

اعداد e و c مربوط به ریشه‌های زوج عدد b می‌باشند.

عدد d می‌تواند توان زوج یا فرد عدد b باشد.

عدد f ، توان زوج عدد a می‌باشد.

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، تنها عملی که قطعاً بین اعمال فوق نیست، ریشه سوم می‌باشد.

گزینه درست: ۴

سوال ۱۶۳

گزینه «۴»

عبارت را باید بر حسب توان ۲ و ۳ بنویسیم:

$$\frac{2^{2m} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{6}}}{12^m \times \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}}} = \frac{2^{2m} \times 2^{-\frac{5}{6}} \times 3^{-\frac{5}{6}}}{2^{2m} \times 3^m \times 2^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{5}{6}}}$$

$$= 2^{(-\frac{5}{6} - 2m - \frac{5}{6})} \times 3^{(3m - \frac{5}{6} - m + \frac{5}{6})} = 2^{\frac{3}{6}}$$

توان عدد ۲ باید برابر $\frac{3}{6}$ و توان عدد ۳ باید برابر صفر شود:

$$-\frac{5}{6} - 2m - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow m = -\frac{13}{6}$$

$$3n - \frac{5}{6} - m + \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow 3n = \frac{5}{6} - \frac{13}{6} - \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{5}{9}$$

گزینه درست: ۴

سوال ۱۶۴

گزینه «۴»

با شرط $x \neq 0$ ، طرفین $x^6 - 7x^3 + 9 = 0$ را بر x^3 تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^6 - 7x^3 + 9}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 - 7 + \frac{9}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{9}{x^3} = 7$$

به طرفین ۶ واحد اضافه می‌کنیم $\rightarrow x^3 + \frac{9}{x^3} + 6 = 7 + 6 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 = 13$

$$\Rightarrow x + \frac{3}{x} = \pm \sqrt{13} \xrightarrow{x > 0} x + \frac{3}{x} = \sqrt{13}$$

حال عبارت $\frac{2x^3}{x^3 + 27}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x^3}{x^3 + 27} = \frac{2}{x^3 + \frac{27}{x^3}} = \frac{2}{x^3 + \left(\frac{3}{x}\right)^3} = \frac{2}{\left(x + \frac{3}{x}\right)^3 - 9\left(x + \frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{13})^3 - 9\sqrt{13}} = \frac{2}{13\sqrt{13} - 9\sqrt{13}} = \frac{2}{4\sqrt{13}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

$$\frac{a^F + a^{\frac{a}{F}} + a^{\frac{a^2}{F^2}} + \dots + a^{\frac{a^{F-1}}{F^{F-1}}}}{a^{-1} + a^{-1} + a^{-1} + \dots + a^{-F}} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a^F(1+a+\dots+a^F)}{a^{-1} \cdot (1+a+\dots+a^F)} = 3^{\frac{a}{F}}$$

$$\Rightarrow a^F = 3^{\frac{a}{F}} \Rightarrow a = 3^{\frac{a}{F^2}} \Rightarrow a^{\frac{F}{a}} = \left(3^{\frac{a}{F^2}}\right)^{\frac{F}{a}}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{F}{a}} = 3^{\frac{1}{F}} = \sqrt[F]{3}$$

$$a = 3c - 2b \Rightarrow a - c = 2(c - b) \quad (1)$$

$$3c^3 = 2b^3 + a^3 \Rightarrow 2(c^3 - b^3) = a^3 - c^3$$

$$\Rightarrow 2(c - b)(c^2 + bc + b^2) = (a - c)(a^2 + ac + c^2)$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} c^2 + bc + b^2 = a^2 + ac + c^2$$

$$\Rightarrow bc - ac + b^2 - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow c(b - a) + (b - a)(b + a) = 0$$

$$\Rightarrow (b - a)(c + a + b) = 0 \stackrel{a \neq b}{\rightarrow} a + b = -c$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = -1$$

ابتدا با ساده‌سازی رادیکال با فرجه ۶ داریم:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{9}{\sqrt{7}} + 2\sqrt{2}\right)} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 2\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 2\right)}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - 2\right)} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 2\right)} = \sqrt[3]{-\frac{7}{7}} = -\sqrt[3]{\frac{7}{7}}$$

با توجه به اینکه $\sqrt{\alpha}$ وجود دارد، بنابراین $\alpha \geq 0$ ، از طرفی $\alpha^3 < \sqrt{\alpha}$ ، پس $0 < \alpha < 1$ است.

از $\beta^2 < \sqrt[3]{\beta}$ می‌تواند عددی منفی یا عدد بزرگتر از یک باشد.

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) این مورد لزوماً درست نیست، زیرا اگر $0 < \alpha\beta < 1$ ، آنگاه ریشه سوم $\alpha\beta$ ، از ریشه پنجم آن کوچکتر است.

(ب) چون $\alpha > 0$ ، برای آنکه $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ وجود داشته باشد، باید $\beta > 0$ ، از طرفی $\beta > 1$ است. بنابراین $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ و ریشه چهارم مثبت $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}$ ، از ریشه دوم آن بزرگتر است. این مورد درست است.

(ج) $0 < \alpha < 1$ است، بنابراین $\alpha^2 < \alpha$ و هر دو ریشه دوم α^2 ، از ریشه سوم آن کوچکتر است. این مورد درست است.

(د) اگر $-1 < \beta < 0$ ، آنگاه $0 < \beta^2 < 1$ و ریشه سومش بزرگتر است. این مورد لزوماً درست نیست.

ابتدا توجه کنید که:

$$\sqrt{2x^y - x + 1} + \sqrt{x^y + 1} = -5x$$

$$\frac{(2x^y - x + 1) - (x^y + 1)}{\sqrt{2x^y - x + 1} - \sqrt{x^y + 1}} = -5x$$

$$\Rightarrow \frac{x^y - x}{\sqrt{2x^y - x + 1} - \sqrt{x^y + 1}} = -5x$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} 5(\sqrt{2x^y - x + 1} - \sqrt{x^y + 1}) = \frac{x^y - x}{-x} = 1 - x$$

بنابراین اگر فرض کنیم $a = \sqrt{2x^y - x + 1}$ و $b = \sqrt{x^y + 1}$ باشند، تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\begin{cases} a + b = -5x \\ 5(a - b) = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = 5x \\ 5a - 5b = 5 - 5x \end{cases}$$

بنابراین اگر طرفین تساوی‌های بالا را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$24a - 26b = 5 \Rightarrow 12a - 13b = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{2x^y - x + 1} - 13\sqrt{x^y + 1} = \frac{5}{2}$$

$$A = x^y(x+1) + \frac{1}{x^y}\left(\frac{1}{x}+1\right) = x^y + \frac{1}{x^y} + x^y + \frac{1}{x^y}$$

می‌دانیم اتحادهای $a^y + b^y = (a+b)^y - yab(a+b)$ و $a^y + b^y = (a+b)^y - yab$ برقرار است:

$$\Rightarrow A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^y - y\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^y - y\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^y - y\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^y - y \quad (*)$$

حال از رابطه داده شده، مقدار عبارت $x + \frac{1}{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$x^y - ykx + 1 = 0 \xrightarrow{\div x} x + \frac{1}{x} = yk$$

$$(*) A = (yk)^y - y(yk) + (yk)^y - y = 2k^y + yk^y - yk - y$$

از داخلی‌ترین رادیکال شروع کرده و ساده‌سازی را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{2\sqrt{16\sqrt{2^y} \times 2}} \sqrt{\frac{2}{3^y}} = \sqrt{2\sqrt{2^y} \times 2^{\frac{y}{2}}} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 2^{\frac{y}{2}}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2^{\frac{y+2}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{y+2}{4}} \\ &= 2^{\frac{y+4}{4}} = 2^{\frac{y}{4}} = \sqrt[4]{2^y} \end{aligned}$$

گزینه «۱»

دو عدد $5\sqrt{2} + 7$ و $5\sqrt{2} - 7$ معکوس یکدیگرند؛ زیرا:

$$(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7) = 50 - 49 = 1$$

پس عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{1+(5\sqrt{2}+7)^x} + \frac{1}{1+(5\sqrt{2}-7)^x} = \frac{1}{1+(5\sqrt{2}+7)^x} + \frac{(5\sqrt{2}+7)^x}{1+(5\sqrt{2}+7)^x} = 1$$

پس به ازای هر مقدار حقیقی x ، حاصل عبارت داده شده برابر ۱ است.

گزینه «۲»

$$-3^3 < -9/25 < -2^3 \Rightarrow -3 < \sqrt[3]{-9/25} < -2$$

$$\xrightarrow{\text{کمترین مقدار عدد صحیح } b} b = -2$$

$$\Rightarrow b(-\sqrt[4]{8}) = \sqrt[3]{128} \Rightarrow -2 \times (-2 \frac{2}{3}) = 2 \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{2}{3} = 2 \frac{2}{n} \Rightarrow n = 3$$

گزینه «۳»

ابتدا $a^6 - b^6$ را باز می‌کنیم:

$$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

پس برای محاسبه $a^6 - b^6$ به $a^2 + b^2$ و $a + b$ نیاز داریم.

می‌دانیم اتحاد مقابل برقرار است: $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

پس داریم:

$$2 = (1)^3 + 3ab(1) \Rightarrow ab = \frac{1}{3}$$

اتحاد بالا را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2$$

$$\xrightarrow{a-b=1} a^2 + ab + b^2 = 2$$

$$\xrightarrow{ab=\frac{1}{3}} a^2 + b^2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

هم‌چنین داریم:

$$a^2 + ab + b^2 + ab = (a + b)^2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow a + b = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$

در نتیجه حاصل $a^6 - b^6$ برابر می‌شود با:

$$a^6 - b^6 = \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \times \frac{5}{3} = \pm \frac{5}{9} \sqrt{21}$$

$$\begin{aligned}
 N^y &= y - \sqrt{13} + 2\sqrt{49-13} + y + \sqrt{13} \\
 &= 14 + 2 \times 6 = 26 \\
 \Rightarrow \sqrt{N^y + k\sqrt{k}} &= 6 \Rightarrow \sqrt{26 + k\sqrt{k}} = 6 \\
 \Rightarrow k\sqrt{k} &= 10 \Rightarrow k^{\frac{3}{2}} = 10 \Rightarrow k^3 = 100 \Rightarrow k = \sqrt[3]{100}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= y + 4\sqrt{3} = (y + 4\sqrt{3}) \frac{(y - 4\sqrt{3})}{(y - 4\sqrt{3})} \\
 &= \frac{49 - 16 \times 3}{y - 4\sqrt{3}} = \frac{1}{b} \Rightarrow ab = 1
 \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 a^b \times b^a &= a^b \left(\frac{1}{a}\right)^a = a^b a^{-a} = a^{b-a} \\
 &= (y + 4\sqrt{3})^{y-4\sqrt{3}-y+4\sqrt{3}} = (y + 4\sqrt{3})^{-8\sqrt{3}} \\
 &= (y + \sqrt{3})^{-16\sqrt{3}} = (y - \sqrt{3})^{16\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^{a+1} &= 3 \times 5^y \Rightarrow 3^a = 5^y \\
 (\sqrt{5})^{b+y} &= 3 \times 5 \Rightarrow 5^{\frac{b}{2}} \times 5 = 3 \times 5 \Rightarrow 5^{\frac{b}{2}} = 3 \\
 \Rightarrow \begin{cases} 3^a = 5^y \\ 3^a = 5^{\frac{ab}{2}} \end{cases} &\Rightarrow \frac{ab}{2} = y \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow (ab)^y = 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} &= \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^3} = \sqrt{\sqrt{5}+2} \\
 t^y &= (\sqrt{\sqrt{5}-2} + \sqrt{\sqrt{5}+2})^y \\
 &= (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}+2) + 2\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} \\
 &= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5-4} = 2\sqrt{5} + 2 \\
 t^4 - 4t^y &= t^y(t^y - 4) = (2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2) \\
 &= 20 - 4 = 16
 \end{aligned}$$

ابتدا حاصل $a^6 + b^6$ و سپس از آن $a^3 - b^3$ را حساب می‌کنیم:

$$a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 = (a^3 + b^3)^2 - 2(ab)^3$$

$$\Rightarrow a^6 + b^6 = ۴۰^2 - ۲(۲)^3 = ۱۶۰۰ - ۱۶ = ۱۵۸۴$$

از طرفی داریم:

$$(a^3 - b^3)^2 = a^6 + b^6 - 2a^3b^3$$

$$= ۱۵۸۴ - ۲(۲)^3 = ۱۵۶۸$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 = \sqrt{۱۵۶۸} = \sqrt{۱۶ \times ۴۹ \times ۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

حال می‌توانیم حاصل $a^6 - b^6$ را حساب می‌کنیم:

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = ۴۰ \times ۲۸\sqrt{۲} = ۱۱۲۰\sqrt{۲}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{۳}}{۱+\sqrt[3]{۳}}\right)^3 + \sqrt[3]{۳} \left(\frac{\sqrt[3]{۳}}{۱+\sqrt[3]{۳}}\right)^2 - ۱$$

$$= \frac{۳}{(۱+\sqrt[3]{۳})^3} + \sqrt[3]{۳} \times \frac{\sqrt[3]{۳}}{(۱+\sqrt[3]{۳})^2} - ۱$$

$$= \frac{۳+۳\sqrt[3]{۳}+۳\sqrt[3]{۳}-۱-۳\sqrt[3]{۳}-۳\sqrt[3]{۳}-۲}{(۱+\sqrt[3]{۳})^3} = ۰$$